**Методический материал по теме:**

**«Решение задач на комбинации геометрических тел»**

Результаты ЕГЭ показали, что задания С 2 (№16), содержащие стереометрическую задачу, вызывают у учащихся затруднения, и, часто, к их решению они просто не приступают.

Главной объяснением своих неудач школьники называют чувство страха перед стереометрической задачей, особенно перед задачей на комбинацию геометрических тел, и преодолеть этот барьер не могут. Среди причин, которые могут как-то объяснить данную ситуацию, можно назвать следующие:

* в учебниках геометрии 10-11 классов не содержится раздела или пункта

«Комбинации геометрических тел»;

* учителям часто не хватает учебного времени на рассмотрение этих задач;
* комбинации даже двух геометрических тел насчитывает десятки видов;
* недостаточно развитое пространственное мышление учащихся;
* отсутствие эффективных методик обучения учащихся по этому вопросу.

Действительно “Комбинации геометрических тел” – одна из самых трудных тем геометрии. Она является развитием системы всех знаний, умений и навыков курсов планиметрии и стереометрии, углубляет и расширяет курс геометрии и показывает практическое применение геометрических знаний в реальной жизни. Одной из самых важных задач преподавания геометрии является формирование и развитие у учащихся пространственных представлений, а также способности и умения производить операции над пространственными объектами. Достижение этой цели важно не только для тех учащихся, которые в дальнейшем посвятят себя техническим профессиям, но и для специальности дизайнера, модельера, хирурга и других. Слабое развитие пространственных представлений затрудняет изучение ряда учебных дисциплин, а в деятельности взрослого человека может стать причиной многих неудач. Систематическая работа над формированием и развитием пространственных представлений приводит к их улучшению даже при наличии средних природных данных. Организация учебного процесса предусматривает применение методов геометрической наглядности. Изучение и применение этих методов в конкретной задачной и житейской ситуациях способствуют развитию наглядно – действенного и наглядно – образного видов мышления, развитию практической математической компетентности.

Применение современных технологий обучения позволяет совершенствовать

методику преподавания. Так для обучения учащихся решению задач на комбинации геометрических тел целесообразно использовать технологию модульного обучения – гибкую образовательную технологию, позволяющую в комплексе решать такие задачи, как отбор, оптимизация и структурирование содержания на деятельностной основе; обеспечение возможности вариативного изучения содержания; специфическое порционное предъявление учебного материала и пошаговый контроль успешности обучения; адаптация программы обучения к уровню подготовки обучаемого.

Для лучшего восприятия учащимися учебного материала использовать метод демонстрации учебно-наглядных пособий: показ макетов, моделей, изображений предметов, геометрических фигур, слайдов, презентаций и другое. Применение этих методов позволяет излагать в логической последовательности нужные сведения, знакомить с особенностями геометрических фигур и приспособлений, с сущностью технологических операций.

Современные компьютерные технологии открыли новые возможности для создания иллюстрированного наглядного материала.

Изучение темы “Комбинации геометрических тел” дает возможность проявить свои способности учащимся, имеющим высокую математическую подготовку, и позволит им не только оценить свои способности и возможности, но и сделать обоснованный выбор будущей профессии. Спецкурс «Решение задач на комбинацию геометрических тел» поможет в этом.

Курс «Решение задач на комбинацию геометрических тел» рассчитан на учащихся профильных классов, так как для решения задач в рамках данного курса необходимо наличие уже сформированного алгоритмического аппарата. Главный упор при изучении курса“ Решение задач на комбинацию геометрических тел” сделан на усиление практического содержания, что позволяет максимум времени отводить на отработку практических заданий. Тем самым осуществляется подготовка выпускников профильных классов к ЕГЭ по математике.

При изучении данного курса особенно возрастают требования к качеству и наглядности чертежа. Наиболее важные требования сводятся к трём свойствам**: верности, наглядности и простоте построения.** Сюда входят выбор оптимального положения изображаемого тела, выбор ракурса и проекции, умение свести к минимуму число изображаемых линий, умения строить сечения и проекции на плоскость, умение выделять на пространственном чертеже, умение перевести условие задачи на графический язык. Построение изображений совокупности пространственных форм на одном чертеже вызывает некоторые трудности. Еще большие трудности возникают при построении чертежей вписанных и описанных поверхностей. Если рассматриваются комбинации тел, отличных от вписанных и описанных комбинаций, в условии задач должно быть точно описано их взаимное расположение.

При изучении курса “Решение задач на комбинацию геометрических тел” можно выделить следующие основные разделы

* комбинации многогранников (в задачах на комбинации многогранников рассматриваются комбинации призм, комбинации пирамид и комбинации призм и пирамид);
* комбинации тел вращения (в задачах на комбинации тел вращения чаще всего встречаются комбинации шара и цилиндра, шара и конуса);
* комбинации многогранников и тел вращения ;
* сложные комбинации геометрических тел (сложными комбинациями называются комбинации трех и более тел).

**Цель курса** – эффективная подготовка выпускников к сдаче ЕГЭ по математике.

**Задачи курса:**

• развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности;

• развитие умений соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур;

• развитие умений изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;

• развитие умений решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппараты;

• проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;

• вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций.

**Содержание курса:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Тема | Методы решения | Часы |
| 1 | Комбинации многогранников | Метод проецирования  Метод дополнительных построений  Построение плоскостей | 6 |
| 2 | Комбинации многогранников и тел вращения (призмы и конусы, призмы и цилиндры, призмы и шары) | Метод проецирования  Использование свойств объема | 6 |
| 3 | Комбинации многогранников и тел вращения (пирамиды конусы, пирамиды и цилиндры, пирамиды и шары) | Метод проецирования  С использованием вычислений объемов пирамид | 6 |
| 4 | Комбинации тел вращения (цилиндры и конусы,  шары и цилиндры,  шары и конусы) | Решение конкурсных задач  Методы с использованием поэтапных вычислений | 6 |
| 5 | Сложные комбинации геометрических тел | Разбиение на простые тела  Метод координат  Решение конкурсных задач | 6 |
| 6 | Решение задач №16 ЕГЭ |  | 4 |
|  |  | ИТОГО | 34 |

Традиционно одними из самых трудных в школьном курсе геометрии считаются задачи на комбинации геометрических тел. Для того, чтобы успешно решать эти задачи, учащийся должен: обладать развитым пространственным мышлением и знанием основных фактов, методов, формул школьной геометрии. Тема «Комбинации геометрических тел» является развитием системы всех знаний и навыков курсов планиметрии и стереометрии, углубляет и расширяет курс геометрии и показывает практическое применение геометрических знаний в реальной жизни.

**(слайд 2)** При решении задач на комбинации многогранников, цилиндра, конуса и шара чаще всего встречается 9 комбинаций.

**(слайд 3)** пирамида и конус

**(слайд 4)** призма и конус

**(слайд 5)** призма и цилиндр

**(слайд 6)** цилиндр и конус

**(слайд 7)** цилиндр и пирамида

**(слайд 8)** цилиндр и шар

**(слайд 9)** конус и шар

**(слайд 10)** Наибольшие трудности при изображении комбинаций фигур возникают в тех случаях, когда одна из фигур шар, а другая – призма, или

**(слайд 11)** пирамида

В таких задачах изображение самого шара, как правило, бывает излишним – достаточно лишь указать его центр и точки касания с различными плоскостями и прямыми.

При решении задач на комбинации фигур полезно делать различные вспомогательные планиметрические чертежи, т. е. «выносы плоских конфигураций», изображение которых искажено пространственной перспективой.

**(слайд12)** Решая вспомогательные планиметрические задачи следует пользоваться свойствами и признаками касательной к окружности и касательной плоскости к сфере.

Например

* Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.
* Отрезки касательных прямых, проведённые к сфере из одной точки, равные между собой.

Остановимся подробнее на комбинации шара и призмы. (**Слайд 13**)



Решим следующую **задачу 1: (слайд 14)**

1. Известно, что АВ, АС, AD,DE,DF- ребра куба. Через вершины E, F и середины рёбер АВ и АС проведена плоскость Р, делящая шар, вписанный в куб, на две части.
2. Постройте плоскость Р.
3. Найдите отношение объёма меньшей части шара к объёму всего шара.

Решение. Задача в духе демоверсии ЕГЭ ( профильный уровень). (**слайд 15)**

R=OM =OL

а) Сечение куба плоскостью Р – равнобедренная трапеция IEFH

(IH ║ BC║EF)

b) Известно, что любая секущая шара разделяет его на два шаровых сегмента. Меньшая часть шара – есть шаровой сегмент, высота которого

h = R – OT, где ОТ – это перпендикуляр из центра шара О на плоскость сечения.

Vшарового сегмента =

Воспользуемся вспомогательным планиметрическим чертежом **(слайд 16**)

Найдём OT:

Сторона куба равна 2R, тогда АК =2R, NM = = , LM = 2R. По теореме Пифагора найдём LN: LN = .

Треугольники LMN и LTO подобны по двум углам, поэтому OT : NM = LO : LN, OT =

Тогда h = R – OT = .

Vшарового сегмента =

Vшара =

.

Ответ: .

**Задача 2. (слайд 17)**

В прямую призму ABCDA1B1C1D1, нижним основанием которой является ромб ABCD, а АА1, ВВ1, СС1,DD1- боковые ребра, вписан шар радиуса 1.

1. Постройте плоскость, проходящую через вершины А, В, С1.
2. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что угол BAD равен

Решение, (**слайд 18)**

Так как в призму вписан шар радиуса 1, то расстояние между параллельными плоскостями равно диаметру, т. е. 2. Призма прямая, следовательно, расстояние между основаниями h равно боковому ребру , h=2. Расстояние между боковыми гранями равно высоте ромба hромба = 2.

(**слайд 19**)

а) Сечение призмы плоскостью АВС1 есть параллелограмм АВС1D1, так как параллельные плоскости секущей плоскостью пересекаются по параллельным прямым, С1D1 ║AB, AD1║BC1.

b) AA1 =2.

DKhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFAB, DD1http://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIF(ABC) ⇒ D1Khttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFAB. D1K-высота сечения

Sсечения = D1K·АВ

∆ DD1К – прямоугольный равнобедренный, D1K = 2.

∆ADK - прямоугольный, острый угол А равен 600, DK = 2.

AD = =

Sсечения = .

Ответ:

Перейдём к комбинации шара и пирамиды. (**слайд 20**)



1. Задача3. **(слайд 21)**

Шар, вписанный в правильную пирамиду SABC вершиной S , касается грани ASC в точке Е. Через сторону АВ основания АВС пирамиды и точку Е проведено сечение.

1. Постройте сечение.
2. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания пирамиды равна , высота пирамиды равна

Решение. **(слайд 22), (слайд 23)**

Пусть О – центр вписанного шара ED=DO1 , как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности.

1. Искомое сечение – равнобедренный треугольник АВF.
2. DO1 =

∆DEA – прямоугольный, ED=DO1 =, AD = , EA = 2 ED= , tgA =,

∟A = 600

Из ∆ CSO1 ⇒ CS=.

Из ∆ O1DS ⇒ DS = .

Из ∆CSD ⇒ sins = , ES = - =

Из ∆FES по теореме синусов ⇒

.

.

.

.

Sсечения = AB·FM = .

Ответ: .

Задача 4. **(слайд 24)**

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания пирамиды равна , высота пирамиды равна . Шар, вписанный в эту пирамиду, касается боковой грани SAD в точке Е.

1. Постройте сечение, проходящее через ребро АВ и точку Е.
2. Найдите площадь этого сечения.

Решение. **( Слайд 25), (слайд 26)**

а) Искомое сечение ABMN – равнобедренная трапеция.

b) Пусть О – центр вписанного шара. O1F = FE = , как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности.

AF = O1F = FE = , по теореме Пифагора АЕ = .

Из ∆S O1F ⇒ SF = . SE = SF – EF = - . Тогда EF = SF, и точка Е – точка пересечения медиан ∆ASD, т. е. N – середина SD. Тогда MN = = .

Из ∆ASD по свойству медиан AN = AE =

Высота трапеции равна .

Sсечения = Ответ:

**(слайд 27)**

****

**Задача 5. (слайд 28)**

Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды SABCD равны , высота пирамиды равна . Пусть Е – середина бокового ребра SB. Вычислить расстояние от центра шара, описанного около пирамиды SABCD, до плоскости сечения, проведенного через точки A, D, и E.

Решение: **(слайд 29), (слайд 30)**

1. Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к основанию, проведённому через центр этого основания. О є SO1 .
2. Построимсечение через точки A, D и Е.

EF║AD ⇒ равнобедренная трапеция ADFE – искомое сечение.

3). Необходимо найти расстояние от центра шара О до плоскости (ADE). Мы знаем, что расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Построим это расстояние.

4). Плоскость (ADFE) http://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIF (SMN), так как плоскость (ADFE) проходит через прямую AD, перпендикулярную плоскости (SMN). Линия пересечения этих плоскостей – прямая NP. Опускаем перпендикуляр из точки О на NP. ОТhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIF NP. ОТ – искомое расстояние.

5). Установим взаимосвязь между стороной основания и радиусом описанного шара R.

OS = OC = R.

6). Из ∆ОО1С ⇒ угол O1 = 900, O1C = , ОО1 = SO1 – SO = .

По теореме Пифагора ОС2 = ОО12 +О1С2, R2 = ()2+()2, R= .

ОО1= - =

(Слайд 31)

7) SO

7) SO1, NP – медианы. КО1 = SO1 =

8) NK =

9). KO = OO1 – KO1 =

10). ∆KTO подобен ∆KO1N ⇒

11) OT =

Ответ: .

Задача 6 **(слайд 32)**

1. В сферу радиуса R вписана пирамида TABC, основанием которой служит прямоугольный треугольник АВС, все её боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 300, а угол между боковым ребром TA и медианой основания BD равен 600. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро ТВ и пересекающей гипотенузу основания АС?

Решение. **(слайд 33), (слайд 34)**

1). Из условия равенства углов наклона боковых ребер следует, что высота пирамиды проецируется на середину гипотенузы Ас – точку D.

2). Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к основанию, проведённому через центр этого основания (через центр малого круга). Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы.

3) О є TD, O - центр сферы.

4) ТР = 2R, углы TCD,TAD,TBD равны 300 (условие)

5). Построим угол между ТА и BD. Проведём через точку А прямую l параллельную прямой BD, тогда угол TAF равен 600, где TFhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFl, DFhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFl (по теореме о трех перпендикулярах).

6) Пусть плоскость, проходящая через ребро ТВ, пересекает Ас в точке М, тогда сечение пирамиды – треугольник MBT.

SMBT = ·TB·hM, где ТВ = const, hM –высота треугольника, проведённая из точки М.

Тогда наименьшую площадь треугольник MBT будет иметь при минимальной высоте, которую найдём, как расстояние между скрещивающимися прямыми АС и ТВ.

7). Через точку В проводим прямую n ║АС. Тогда прямые ТВ и n задают плоскость, параллельную АС. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми ТВ и АС равно расстоянию между прямой АС и параллельной ей плоскостью (ТВL).

8). Из точки D опускаем перпендикуляр DLhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFn, тогда TLhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIF n по теореме о трёх перпендикулярах. (TLD) ∩ (TLB) = TL.

Опускаем перпендикуляр из точки D на прямую TL. DHhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFTL. HD - расстояние между скрещивающимися прямыми АС и ТВ. Итак, hM  = HD.

9) Пусть AD=DC=DB = , тогда АС = .

Из ∆ ATD ⇒ угол D – прямой, угол А равен 300, AD = , tg300 = TD: AD, TD = ,

AT = 2TD = ,

AT=TB=TC =.

10) Из ∆ ATР ⇒ угол А – прямой, ADhttp://festival.1september.ru/articles/531497/img8.GIFTP , AD = , DP = TP-TD,

.

11) Рассмотрим ∆ABD

L

B

D

C

F

A

SABD= DF·BD = DL·AD.

Так как BD=AD, то DF=DL.

Рассмотрим ∆ATF: угол F – прямой, угол А равен 600, AT = , =, AF =

12) ∆ADF

Угол F –прямой, AD = , AF = . По теореме Пифагора DF =

13) DF=DL=

14) ∆ TDL

Угол D – прямой, TD = , DL= . По теореме Пифагора TL =

15) HD = =

16) min SBMT =

SBMT =

Учитывая, что , то получим S =

Ответ: